Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

6 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 14 б.

2. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами?

Ответ: $\frac{15}{8}$ мин.

Решение. За одну минуту отец пробегает $\frac{1}{3}$ длины дорожки, а сын пробегает $\frac{1}{5}$ длины дорожки, поэтому вместе они пробегают $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ длины дорожки. От момента встречи до следующей встречи им нужно как раз пробежать общее расстояние, равное длине дорожки. Поэтому их следующая встреча состоится через $\frac{15}{8}$ мин.

Оценивание. За верное решение — 14 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

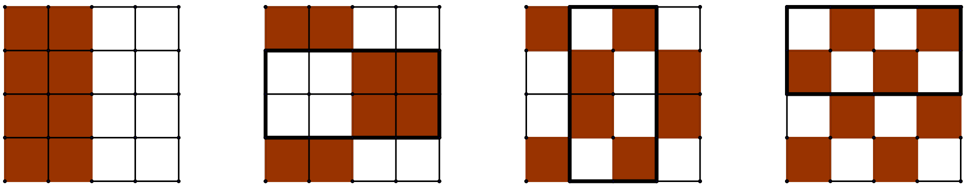

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 18 б.

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

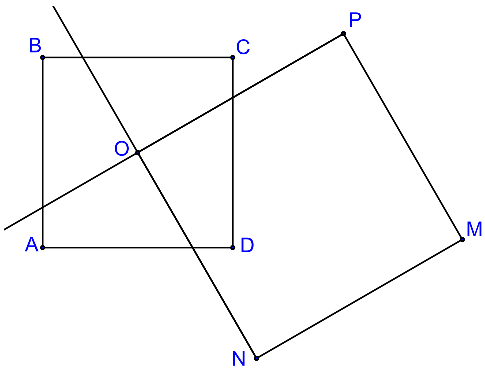

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили квадрат 10×10. Каковы размеры отложенного прямоугольника?

Ответ: 14×16.

Решение. Пусть отложен прямоугольник размером $a \times b$, где $a \leqslant b$ — натуральные числа. Тогда $ab = 18^2 - 10^2 = 224$, и при этом $b \leqslant 18$. Небольшой перебор по делителям числа 224 показывает, что выписанным условиям удовлетворяют только числа $a = 14$ и $b = 16$.

Оценивание. За верное решение — 18 б. Если найдена только площадь прямоугольника, но не найдены его размеры, 4 б.

Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

7 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 12 б.

2. На сторонах квадрата записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на сторонах, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 323. Найдите сумму чисел на сторонах квадрата.

Ответ: 36.

Решение. Пусть на одной паре противоположных сторон записаны числа a и c, а на другой b и d. Тогда сумма произведений равна

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 323.$$

Число $323 = 17 \cdot 19$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение двух натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(a + c) + (b + d) = 17 + 19 = 36.$$

Оценивание. За верное решение — 16 б. Если найдено равенство $(a + c)(b + d) = 323$, но не найдено разложение числа 323 на простые множители, 6 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

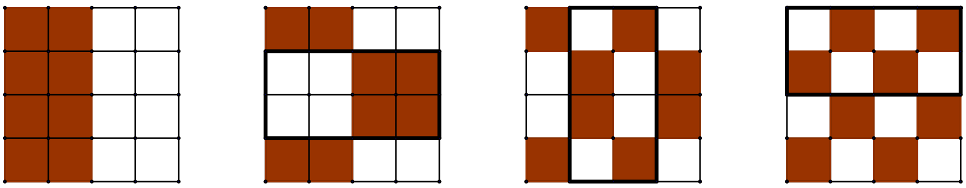

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 18 б.

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

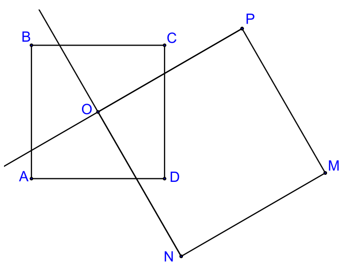

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили прямоугольник с периметром 234. Каковы размеры отложенного прямоугольника?

Ответ: 13×16.

Решение. Пусть отложен прямоугольник размером $c \times d$, где $c \leqslant d \leqslant 18$, а составлен прямоугольник размером $a \times b$, где $a \leqslant b$ (a, b, c, d — натуральные числа).

Имеем $a + b = 117$. Известно, что при сближении двух чисел с фиксированной суммой их произведение увеличивается (доказательство этого факта от 7-классников не требуется, достаточно его упоминания). Поэтому при $3 \leqslant a \leqslant b$ площадь $ab \geqslant 3 \cdot 114 = 342$, что невозможно. Значит, $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 1$, то $b = 116$, а площадь отложенного прямоугольника равна $cd = 324 - 116 = 208$. Небольшой перебор по делителям числа 208 показывает, что выписанным условиям удовлетворяют только числа $c = 13$ и $d = 16$.

Если $a = 2$, то $b = 115$, а площадь отложенного прямоугольника равна $cd = 324 - 230 = 94$. Отсюда число d (больший из двух делителей числа 94) кратно 47, что невозможно при $d \leqslant 18$.

Оценивание. За полное решение — 18 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.

Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

8 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 10 б.

2. Решите ребус: $\mathrm{AX} \times \mathrm{AX} = \mathrm{БPPP}$. (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры. Разные буквы заменяют разные цифры.)

Ответ: $38 \times 38 = 1444$.

Решение. Выясним сначала, каким не может быть число X. Очевидно, $\mathrm{X} \neq 0, 1, 5, 6$ (иначе $\mathrm{X} = \mathrm{P}$). Заметим, что

$$\mathrm{AX} \times \mathrm{AX} = (10\mathrm{A} + \mathrm{X})^2 = 100\mathrm{A}^2 + 20\mathrm{AX} + \mathrm{X}^2.$$

При нечётном X число единиц в данном числе нечётно, а число десятков чётно (при возведении нечётного однозначного числа в квадрат в следующий разряд переносится чётное число), в силу чего последние две цифры будут различными. При $\mathrm{X} = 4$ последняя цифра квадрата 6, а предпоследняя нечётная (из-за переноса единицы в разряд десятков). Остаются два возможных значения X: 2 и 8. Тогда $\mathrm{P} = 4$. Возможные значения A: 3, 5, 6, 7, 8, 9 (при $\mathrm{A} < 3$ число AX^2 не будет четырёхзначным; кроме того $\mathrm{A} \neq \mathrm{P} = 4$). Заметим также, что число, оканчивающееся тремя четвёрками, не кратно 8, в силу этого число AX не должно делиться на 4. Круг возможных значений AX сузился теперь до шести чисел: 62, 82, 38, 58, 78, 98. Подходит только число 38.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: Сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

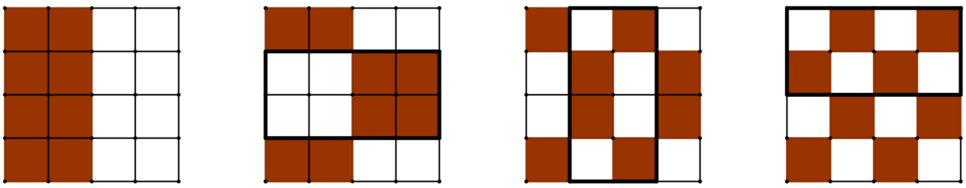

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 15 б.

5. На доске было записано три числа (не обязательно различных). Данил заметил, что если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. А Василий заметил, что если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Можно ли по этим данным достоверно определить, на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

Ответ: можно; произведение увеличится на 9.

Решение. Пусть исходные числа x, y и z. По условию,

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + 1; \\ (x+2)(y+2)(z+2) = xyz + 2. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 0; \\ 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) = -6. \end{cases}$$

Обозначим $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$. Требуется найти

$$(x+3)(y+3)(z+3) - xyz = 9(x+y+z) + 3(xy+yz+zx) + 27 =$$

$$= 9a + 3b + 27,$$

если $a + b = 0$ и $4a + 2b = -6$. Из последних двух уравнений находим $a = -3$, $b = 3$. Значит, $9a + 3b + 27 = 9$.

Замечание. Можно доказать, что $x = y = z = -1$.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если высказано (но не доказано) предположение, что $x = y = z = -1$, 3 б.

6. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

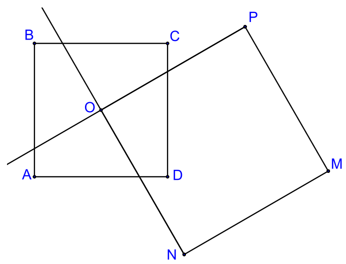

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 75°$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: $15°$, $135°$, $30°$.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на $60°$ (рис. 3).

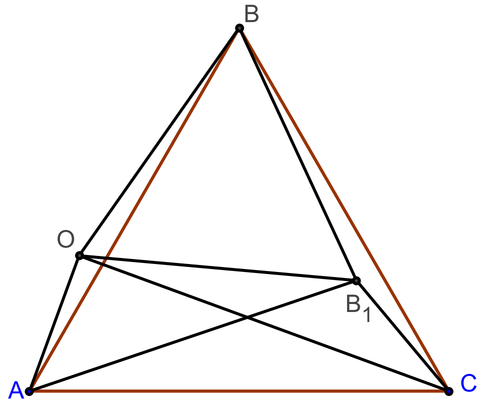

Рис. 3

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75^\circ + 90^\circ = 165^\circ;$$

$$\angle OB_1C = 360^\circ - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135^\circ;$$

$$\angle B_1CO = 180^\circ - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30^\circ.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.

Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания
9 класс

1. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами?

Ответ: $\frac{15}{8}$ мин.

Решение. За одну минуту отец пробегает $\frac{1}{3}$ длины дорожки, а сын пробегает $\frac{1}{5}$ длины дорожки, поэтому вместе они пробегают $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ длины дорожки. От момента встречи до следующей встречи им нужно как раз пробежать общее расстояние, равное длине дорожки. Поэтому их следующая встреча состоится через $\frac{15}{8}$ мин.

Оценивание. За верное решение — 10 б.

2. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 13 б.

3. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1+x_2)(y_1z_1+z_1y_2+y_2z_2+z_2y_1) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3 + 11 + 61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

4. Решите ребус: $\text{АХ} \times \text{АХ} = \text{БРРР}$. (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры. Разные буквы заменяют разные цифры.)

Ответ: $38 \times 38 = 1444$.

Решение. Выясним сначала, каким не может быть число Х. Очевидно, $\text{Х} \neq 0, 1, 5, 6$ (иначе $\text{Х} = \text{Р}$). Заметим, что

$$\text{АХ} \times \text{АХ} = (10\text{А} + \text{Х})^2 = 100\text{А}^2 + 20\text{АХ} + \text{Х}^2.$$

При нечётном Х число единиц в данном числе нечётно, а число десятков чётно (при возведении нечётного однозначного числа в квадрат в следующий разряд переносится чётное число), в силу чего последние две цифры будут различными. При $\text{Х} = 4$ последняя цифра квадрата 6, а предпоследняя нечётная (из-за переноса единицы в разряд десятков). Остаются два возможных значения Х: 2 и 8. Тогда $\text{Р} = 4$. Возможные значения А: 3, 5, 6, 7, 8, 9 (при $\text{А} < 3$ число АХ^2 не будет четырёхзначным; кроме того $\text{А} \neq \text{Р} = 4$). Заметим также, что число, оканчивающееся тремя четвёрками, не кратно 8, в силу этого число АХ не должно делиться на 4. Круг возможных значений АХ сузился теперь до шести чисел: 62, 82, 38, 58, 78, 98. Подходит только число 38.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + 1; \\ (x+2)(y+2)(z+2) = xyz + 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = z = -1$.

Решение. Систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 0; \\ 4(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) = -6. \end{cases}$$

Обозначим $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$. Тогда $u + v = 0$ и $4u + 2v = -6$. Из последних двух уравнений находим $u = -3$, $v = 3$. Значит,

$$\begin{cases} x + y + z = -3; \\ xy + yz + zx = 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта система имеет очевидное решение $x = y = z = -1$. Докажем, что других решений нет. Действительно,

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 =$$

$$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 2(x+y+z) + 3 = 9 - 6 - 6 + 3 = 0.$$

Сумма трёх неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю, то есть $x+1 = y+1 = z+1 = 0$.

Оценивание. За верное решение — 16 б. Если ответ угадан, но никаких обоснований его единственности не приведено, 3 б. Если получены равенства $(*)$, 5 б. (а вместе с угаданным ответом 8 б.)

6. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 75°$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: $15°$, $135°$, $30°$.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на $60°$ (рис. 2).

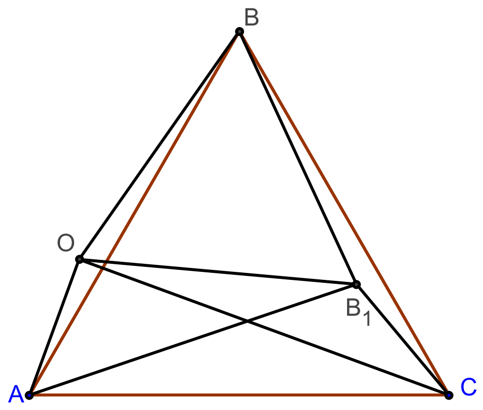

Рис. 2

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75° - 60° = 15°;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75° + 90° = 165°;$$

$$\angle OB_1C = 360° - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135°;$$

$$\angle B_1CO = 180° - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30°.$$

Оценивание. За верное решение — 16 б.

7. Назовём натуральное число интересным, если оно удовлетворяет следующим трём условиям: а) оно девятизначное; б) в его записи есть каждая ненулевая цифра; в) оно делится на 11. Найдите:

1) какое-нибудь интересное число;

2) самое маленькое и самое большое интересное число;

3) общее количество интересных чисел.

Ответ: самое маленькое интересное число 123 475 869, самое большое 987 652 413, а всего их $11 \cdot 5! \cdot 4! = 31\,680$.

Решение. Пусть x — сумма цифр 9-значного числа, стоящих на чётных местах, а y — сумма цифр на нечётных местах. По признаку делимости на 11, разность $x - y$ должна быть кратна 11. Поскольку $x + y = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, получаем отсюда, что $x = 17$ или 28 (соответственно, $y = 28$ или 17). Вот все четвёрки и пятёрки попарно различных ненулевых цифр с суммой цифр 17:

$$1,2,5,9; \quad 1,2,6,8; \quad 1,3,4,9; \quad 1,3,5,8; \quad 1,3,6,7; \quad 1,4,5,7;$$

$$2,3,4,8; \quad 2,3,5,7; \quad 2,4,5,6; \quad 1,2,3,4,7; \quad 1,2,3,5,6.$$

Цифры из перечисленных четвёрок стоят на чётных местах, а из пятёрок — на нечётных местах. Значит, имеем 11 способов распределить цифры по чётным и нечётным местам. При заданном таком распределении цифры на чётных местах переставляются 4! способами, а на нечётных 5! способами. Поэтому всего интересных чисел $11 \cdot 4! \cdot 5!$. В самом маленьком интересном числе цифры, стоящие на нечётных местах, дожны идти по возрастанию, равно как и цифры на чётных местах. Для самого большого интересного числа всё наоборот. Небольшой перебор позволяет найти ответ.

Оценивание. За полное решение — 16 б. За пример интересного числа 3 б. Если (без обоснований) найдено самое маленькое (или самое большое) интересное число, 4 б., а если и одно, и другое, 5 б. Если найдены структура интересного числа и количество интересных чисел, но ошибки в п. 2, то минус 3 б. за каждую ошибку.

Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

10 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 13 б.

2. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$x_1x_2(y_1z_1 + z_1y_2 + y_2z_2 + z_2y_1) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3 + 11 + 61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x - y}; \\ 6y^2 + 7y + 1 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$, $y = -1$.

Решение. Область допустимых значений переменных описывается неравенством $x - y \geqslant 1$. Из первого уравнения системы имеем $\sqrt{x-y} = \cos^2(\pi x) \leqslant 1$, откуда $x - y \leqslant 1$. Значит, $x - y = 1$. Тогда $\cos^2(\pi x) = 1$, $x = k \in \mathbb{Z}$, $y = k - 1 \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение системы принимает вид $6y^2 + 7y + 1 = 0$. Здесь только один целый корень $y = -1$, при этом $x = 0$.

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если ответ угадан, но решение отсутствует, 2 б. Если только доказано, что $x - y = 1$, 3 б.

4. Решите неравенство $\dfrac{(x^3+x)^3 - 8x^6}{32x^{10} - (x+2)^5} \geqslant 0$.

Ответ: $(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0] \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty) \cup \{1\}$.

Решение. С помощью функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^5$ решаемое неравенство можно записать так:

$$\frac{f(x^3+x) - f(2x^2)}{g(2x^2) - g(x+2)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Заметим, что $f(x)$ — возрастающая функция. Поэтому для любых a и b знак разности значений функции $f(a) - f(b)$ совпадает со знаком разности аргументов $a - b$. Аналогичное утверждение справедливо по отношению к функции $g(x)$. Поэтому в неравенстве (1) разности значений функций f и g можно заменить разностями их аргументов:

$$\frac{(x^3+x) - 2x^2}{2x^2 - (x+2)} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку функции f и g определены на всей числовой прямой, при таком переходе область допустимых значений переменной x не изменилась, и неравенства (1) и (2) равносильны. Неравенство (2) преобразуется к виду $\frac{x(x-1)^2}{2x^2-x-2} \geqslant 0$, после чего решается методом интервалов.

Оценивание. За верное решение — 14 б. За потерю решения $x = 1$ минус 3 б.

5. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: 15°, 135°, 30°.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на 60° (рис. 2).

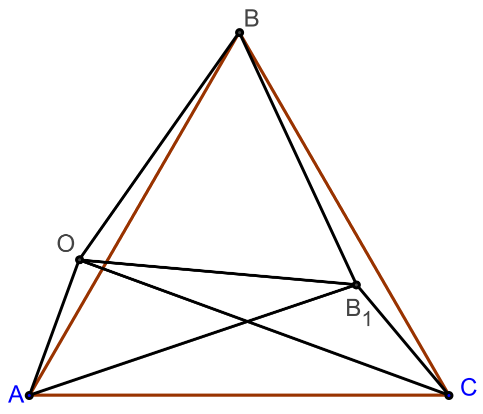

Рис. 2

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75^\circ + 90^\circ = 165^\circ;$$

$$\angle OB_1C = 360^\circ - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135^\circ;$$

$$\angle B_1CO = 180^\circ - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30^\circ.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \ldots + \sqrt{n^2+2n}$.

Ответ: $2n^2 + n$.

Решение. Преобразуем сумму корней:

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2+k} = \sum_{k=1}^{2n} (n + (\sqrt{n^2+k} - n)) = 2n^2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}.$$

Обозначим $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}$ и оценим эту величину. С одной стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} < \dfrac{k}{2n}$. Отсюда

$$\Delta < \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1+2n}{2} \cdot 2n = n + \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} > \dfrac{k}{\sqrt{n^2+2n+1}+n} = \dfrac{k}{2n+1}$ и

$$\Delta > \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n = n.$$

Таким образом, $n < \Delta < n + \frac{1}{2}$ и целая часть числа Δ равна n. Теперь осталось учесть, что $S = 2n^2 + \Delta$.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x * y = \frac{2x+y}{xy+2}$. Найдите значение выражения

$$(\ldots((2014 * 2013) * 2012) * \ldots * 2) * 1.$$

Ответ: 1

Решение. Заметим, что при любом числе $x \neq -1$ выполнено равенство $x * 2 = 1$. Поэтому

$$C = 1 * 1 = \frac{2+1}{1+2} = 1.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.

Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

11 класс

1. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1+x_2)(y_1z_1+z_1y_2+y_2z_2+z_2y_1) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = 3+11+61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x-y}; \\ 6y^2+7y+1 = \sqrt{x-y-1}. \end{cases}$$

Ответ: $x=0$, $y=-1$.

Решение. Область допустимых значений переменных описывается неравенством $x-y \geqslant 1$. Из первого уравнения системы имеем $\sqrt{x-y} = \cos^2(\pi x) \leqslant 1$, откуда $x-y \leqslant 1$. Значит, $x-y=1$. Тогда $\cos^2(\pi x) = 1$, $x = k \in \mathbb{Z}$, $y = k-1 \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение системы принимает вид $6y^2+7y+1=0$. Здесь только один целый корень $y=-1$, при этом $x=0$.

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если ответ угадан, но решение отсутствует, 2 б. Если только доказано, что $x-y=1$, 3 б.

3. Решите неравенство $\dfrac{2^{\operatorname{arcctg}(x^3+x)} - 2^{\operatorname{arcctg}(2x^2)}}{\operatorname{arctg}(2^{x^2}) - \operatorname{arctg}(2^{x+2})} \leqslant 0.$

Ответ: $(-1;0] \cup (2;+\infty) \cup \{1\}$.

Решение. С помощью функций $f(x) = 2^{\operatorname{arcctg}(x)}$ и $g(x) = \operatorname{arctg}(2^x)$ решаемое неравенство можно записать так:

$$\frac{f(x^3+x) - f(2x^2)}{g(x^2) - g(x+2)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Заметим, что $f(x)$ — убывающая функция (как композиция убывающей функции $y = \operatorname{arcctg} x$ и возрастающей функции $y = 2^x$). Поэтому для любых a и b знак разности значений функции $f(a)-f(b)$ противоположен знаку разности аргументов $a-b$. В свою очередь, $g(x)$ — возрастающая функция (как композиция возрастающих функций $y = 2^x$ и $y = \operatorname{arctg} x$), и для любых a и b знак разности значений функции $g(a) - g(b)$ совпадает со знаком разности аргументов $a - b$. Поэтому, если в неравенстве (1) разности значений функций f и g заменить разностями их аргументов, то знак левой части неравенства поменяется, и оно примет вид

$$\frac{(x^3+x) - 2x^2}{x^2 - (x+2)} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку функции f и g определены на всей числовой прямой, при таком переходе область допустимых значений переменной x не изменилась, и неравенства (1) и (2) равносильны. Неравенство (2) преобразуется к виду $\frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$, после чего решается методом интервалов.

Оценивание. За верное решение — 14 б. За потерю решения $x = 1$ минус 3 б.

4. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны. Медианы граней, проведённые из вершины D, равны 13, 14 и 15. Найдите:

1) площадь основания ABC;

2) объём пирамиды $ABCD$;

3) радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$.

Ответ: 1) 336; 2) $168\sqrt{55}$; 3) $\sqrt{295}$.

Решение. 1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза вдвое больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, поэтому $AB = 26$, $BC = 28$, $CA = 30$. Площадь треугольника ABC находим по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 4\sqrt{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} = 7 \cdot 3 \cdot 16 = 336.$$

2) Пусть $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$. По теореме Пифагора,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 26^2 = 4 \cdot 169; \\ b^2 + c^2 = 28^2 = 4 \cdot 196; \\ c^2 + a^2 = 30^2 = 4 \cdot 225. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $c = 2\sqrt{126}$, $a = 2\sqrt{99}$, $b = 2\sqrt{70}$. Из взаимной перпендикулярности рёбер DA, DB и DC следует, что

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc = \frac{4}{3}\sqrt{9 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 14} = 168\sqrt{55}.$$

3) Пирамиду $DABC$ можно достроить до прямоугольного параллелепипеда с попарно перпендикулярными рёбрами длиной a, b и c. Сфера, описанная вокруг параллелепипеда, будет описана и вокруг пирамиды. Диагональ параллелепипеда — диаметр сферы, поэтому искомый радиус — это половина диагонали:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{295}.$$

Оценивание. За полное решение — 14 б. За отдельные пункты: п. 1 — 4 б., п. 2 — 5 б., п. 3 — 5 б.

5. Докажите, что в десятичной записи числа $B = 2^{697}$ какая-то цифра встретится не менее 22 раз.

Доказательство. Сначала оценим количество цифр в десятичной записи числа B.

$$2^{697} = (2^{10})^{69} \cdot 2^7 > 10^{3 \cdot 69} \cdot 128 > 10^{209}.$$

10^{209} — самое маленькое 210-значное число. Поэтому в записи числа B не менее 210 цифр (на самом деле, их ровно 210, но установить это без помощи калькулятора довольно затруднительно, и в дальнейшем на данный факт мы не опираемся!). Доказывая утверждение задачи рассуждением от противного, предположим, что каждая из десяти цифр встречается не более 21 раза. Тогда всего цифр не более 210. Если в записи числа B более 210 цифр, то противоречие уже получено. Если же цифр ровно 210, то каждая из них должна встретиться по 21 разу. Но тогда общая сумма цифр числа B равна $21(0+1+2+\ldots+9)$ и кратна 3. По признаку делимости на 3, и число B должно делиться на 3, что неверно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Оценивание. За полное решение — 14 б. Если показано, что цифр не менее 210, 5 б. Если к тому же рассмотрен случай, когда цифр больше 210, ещё 3 б.

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\ldots+\sqrt{n^2+2n}$.

Ответ: $2n^2+n$.

Решение. Преобразуем сумму корней:

$$S=\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{n^2+k}=\sum_{k=1}^{2n}(n+(\sqrt{n^2+k}-n))=2n^2+\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}.$$

Обозначим $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}$ и оценим эту величину. С одной стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}<\dfrac{k}{2n}$. Отсюда

$$\Delta<\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=n+\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}>\dfrac{k}{\sqrt{n^2+2n+1}+n}=\dfrac{k}{2n+1}$ и

$$\Delta>\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=n.$$

Таким образом, $n<\Delta<n+\frac{1}{2}$ и целая часть числа Δ равна n. Теперь осталось учесть, что $S=2n^2+\Delta$.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x*y=\frac{3x+2y}{xy+6}$. Найдите значение выражения

$$C=(\ldots((2014*2013)*2012)*\ldots*2)*1.$$

Ответ: $\dfrac{37}{55}$.

Решение. Заметим, что при любом числе $x\neq -2$ выполнено равенство $x*3=1$. Поэтому

$$C=(1*2)*1=\frac{7}{8}*1=\frac{\frac{21}{8}+2}{\frac{7}{8}+6}=\frac{37}{55}.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.